Geometría desde una perspectiva semiótica: visualización, figuras y áreas[1]

Gustavo Marmolejo Avenía
Estudiante de Maestría en Educación con énfasis en Educación Matemática
Cali, Colombia
gusado35@yahoo.es

Myriam Vega Restrepo
Profesora Universidad del Valle
Cali, Colombia
myvega@univalle.edu.co

Resumen

La importancia de las figuras geométricas radica en el hecho de que forman un importante soporte intuitivo para el desarrollo de las actividades geométricas, es decir, dejan ver mucho más de lo que los enunciados dicen, permiten la ilustración de proposiciones, la exploración heurística de situaciones complejas, posibilitan "vistazos" sinópticos sobre ellas y verificaciones subjetivas. Sin embargo hacer de estas representaciones potentes herramientas heurísticas en la resolución de problemas geométricos está lejos de ser un asunto obvio y espontáneo. Por el contrario, es necesario discriminar entre las diferentes formas de ver que una figura posibilita, aquellas que sean pertinentes y potentes a la resolución de la actividad geométrica planteada. En otras palabras es necesario reconocer, aprovechar o vencer, según sea el caso, la presencia de ciertos factores (factores de visibilidad) los cuales hacen posible el discriminar sobre una figura las subfiguras u configuraciones pertinentes a la resolución del problema planteado.

Uno de los campos de conocimiento en los que ha sido más notorio el bajo nivel de logros, en la educación básica y media, es el relativo a las matemáticas. La precariedad de estos resultados tiene que ver, entre otros factores, con el hecho de que hay por lo menos dos características típicas de la actividad cognitiva propia de los procedimientos matemáticos que marcan una diferencia con la actividad cognitiva para el aprendizaje de otras disciplinas. En primer lugar se recurre a

[1] Este documento ha sido elaborado con base en la revisión y análisis teórico realizado en el marco de la investigación "Enunciación y significación de las matemáticas en la educación básica", cofinanciada por la Universidad del Valle y COLCIENCIAS, a la cual se articula el proyecto "Visualización y factores de visibilidad de áreas sombreadas", que realiza Gustavo Marmolejo bajo la dirección de la profesora Myriam Vega Restrepo, para optar al título de Magíster en Educación

varios registros de representación[2], algunos de los cuales han sido desarrollados específicamente para efectuar tratamientos matemáticos (v.g. el álgebra, sistema de numeración posicional, etc.); por otra parte, los objetos matemáticos nunca son accesibles por la percepción, como podrían serio la mayoría de los objetos de otras disciplinas[3]: tienen la característica de no poder ser asequibles de una forma directa sino a través de sus representaciones. Esto lleva a que en el aprendizaje de las matemáticas, los alumnos tengan dificultades y encuentren obstáculos al confundirla representación con lo representado. Este documento se inscribe en una perspectiva semiótica que considera que el aprendizaje y la comprensión de las matemáticas pasa por la distinción que se haga entre el objeto y su representación, por la movilización de diferentes tipos de registros de representación semióticos y por una debida coordinación entre los sistemas semióticos que el conocimiento matemático moviliza.

La geometría es una de las partes de las matemáticas que genera una particular preocupación por parte de los educadores matemáticos, dado su abandono como objeto de estudio en los currículos escolares desde la segunda mitad del siglo XX (entre 1960 y 1980). Tal como señala Villani[4], esto se ve reflejado en las encuestas nacionales e internacionales que evalúan los conocimientos matemáticos de los estudiantes: en ellas, la geometría es con frecuencia totalmente ignorada o incluyen muy pocos ítems de geometría. En algunos casos, las preguntas tienden a ser confinadas a algunos "hechos" elementales sobre figuras simples y sus propiedades. Aún así, el desempeño de los estudiantes que se reporta, es relativamente pobre. El movimiento de las "matemáticas modernas", basado en la suposición de que ciertas partes de la geometría elemental estaban "muertas" para la investigación contemporánea avanzada contribuyó, al menos indirectamente, a disminuir el rol de la geometría en la educación, favoreciendo otros aspectos de las matemáticas y otros puntos de vista para su enseñanza: se dio una presión general en el currículo matemático contra tópicos tradicionales, debido a la introducción de otros

[2]Un sistema de signos se constituye en un registro de representación cuando permite cumplir las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación: 1°, constituir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado. 2°, transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones ¡nidales. Y 3°, convertir las representaciones dadas en un sistema de representaciones en otro sistema, de manera que estas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas al objeto que se representa. Duval, R. Semiosis y pensamiento humano. Cali: Universidad del Valle, 1999.

[3]Duval, R. Quel cognitif retenir en didactique des mathématíqques. Recherches en Didactique des mathématiques, vol. 16, #3, pp 349-382,1996

[4]Documento de discusión para un estudio del ICMI. Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21 st Century An ICMI Study. In ICMI Study. Kluwer Academic publishers, 1998, p 337-346

nuevos como la probabilidad, la estadística, las ciencias computacionales y las matemáticas discretas.

Actualmente existe en la comunidad matemática internacional una amplia convergencia de opinión en que la geometría, después de años de abandono, debiera ser revitalizada en sus variados aspectos en todos lo niveles escolares. No obstante, es utópico, y hasta cierto punto indeseable, pensar que la geometría ocupe ahora un tiempo análogo al que antaño se le dedicaba en las instituciones educativas. Hace 50 años, en Colombia por ejemplo, para la enseñanza de la geometría se dedicaban 5 de las 10 horas semanales asignadas a las matemáticas. En la búsqueda de caminos que permitan revitalizar la geometría como objeto de estudio es indispensable, pues, vencer las dificultades temporales.

Otro aspecto que ha llevado a que esta disciplina haya sido relegada en los currículos escolares, se relaciona con la naturaleza de la actividad cognitiva que la geometría exige para su aprendizaje. Como lo plantea Duval,

> *La actividad matemática en los cursos de geometría se realiza en dos registros: el de las figuras y el de la lengua natural. Uno para designar las figuras y sus propiedades; el otro, para enunciar las definiciones, los teoremas, las hipótesis... Pero no se trata simplemente de un cambio de registro... los tratamientos efectuados separada y alternativamente en cada uno de los dos registros no bastan para que este proceso llegue a algún resultado; es necesario que los tratamientos figurales y discursivos se efectúen simultáneamente y de manera interactiva. La originalidad de los procesos de geometría con otras formas de actividad matemática, tiene que ver con que es absolutamente necesaria la coordinación entre los tratamientos específicos al registro de las figuras y los del discurso teórico en lengua natural.*[5]

Pero, la mayoría de los estudiantes se encuentran muy lejos de alcanzar dicha coordinación. Varias investigaciones han mostrado que uno de los mayores problemas en la enseñanza de la geometría es que muy pocos alumnos logran la coordinación necesaria entre los tratamientos figurales y los tratamientos discursivos, incluso después de la educación básica y media[6]. Una de las razones que explica esta deficiencia tiene que ver con la naturaleza de estos registros, que no son exclusivos

[6]Ibid. p. 164.

de las matemáticas. Los tratamientos figurales parecen proceder de leyes de organización de la percepción visual, y la práctica de un discurso teórico parece ser la prolongación directa de la comprensión inmediata de la lengua utilizada para comunicar[7]. En consecuencia, existe la creencia de que hay una proximidad entre los tratamientos que son naturales en cada uno de estos dos registros y aquellos que la actividad matemática solicita; sin embargo, este resulta ser un fenómeno de falsa proximidad.

> *...entre todos los tratamientos que espontáneamente hacen los sujetos en esos dos registros, cuando se está en el ámbito de las matemáticas algunos se utilizan ocasionalmente y otros se rechazan sistemáticamente. Así, por ejemplo, a veces parece convergir una interpretación perceptiva cuasi-automática de las figuras con la interpretación matemática pertinente, pero con frecuencia también está en divergencia. Pero no hay ningún índice perceptivo que permita distinguir, o prever, los casos de convergencia o de divergencia. De otro lado, la utilización de la lengua natural en las matemáticas proviene de un empleo especializado y no de un empleo común.*[8]

Pues, ¿cómo lograr que la geometría ocupe un lugar importante en la enseñanza de las matemáticas?, ¿cómo lograr que los estudiantes discriminen entre las diferentes posibilidades que brindan los registros de las figuras y de la lengua natural aquellos tratamientos que son exigidos en el aprendizaje de la geometría?, ¿cómo podría darse una enseñanza de la geometría para que los alumnos alcancen una adecuada coordinación entre estos dos registros? Las investigaciones realizadas por Raymond Duval y su equipo aportan un importante marco conceptual para el análisis que puede acercar respuestas tentativas a los cuestionamientos planteados:

- Teniendo en cuenta que los objetos matemáticos tienen la característica de no ser sensorialmente accesibles, su aprendizaje ha de pasar, necesariamente, por los tratamientos propios a cada uno de los registros de representación semiótica en los cuales ellos existen. Para el caso de la geometría, los registros de la lengua natural y el de las figuras, como mínimo.
- El aprendizaje de los tratamientos propios a cada uno de estos dos registros de representación semiótica se ha de realizar por separado.

[7]Ibid. p. 147.

- Respecto a la lengua natural, es necesario hacer explícito en el currículo escolar un trabajo de diferenciación entre la organización discursiva propia de un razonamiento tipo argumentativo y uno deductivo.
- Y con respecto a las figuras, también ha de hacerse explícito un trabajo que lleve a diferenciar entre los diferentes procesos de visualización que este registro permite.

El interés de este artículo recae exclusivamente en el registro de representación semiótica de las figuras. En lo que sigue, se procederá a identificar tres maneras distintas de discriminar información sobre una figura (diferentes formas de ver sobre una figura), se hará manifiesto que ver sobre una figura es un acto cognitivo de gran complejidad y se explicitará la presencia de algunos elementos que aumentan o disminuyen su complejidad.

1. Figuras y Visualización

La importancia de las figuras geométricas radica en el hecho de que forman un importante soporte intuitivo para el desarrollo de las actividades geométricas, es decir, dejan ver mucho más de lo que los enunciados dicen, permiten la ilustración de proposiciones, la exploración heurística de situaciones complejas, posibilitan "vistazos" sinópticos sobre ellas y verificaciones subjetivas. En fin, permiten en la resolución de un problema o en la búsqueda de una demostración, la conducta abducción consistente en delimitar de entrada la clase de hipótesis o alternativas que han de considerarse. Hablar del papel heurístico de las figuras alude a que es la conducta de abducción la que guía la deducción. Sin embargo, en el momento en que los alumnos deben desarrollar situaciones donde las figuras juegan este papel, se observa que ellos se encuentran bastante lejos de poder acceder a sus enormes posibilidades y en muchos casos, por el contrario, le asocian propiedades que no le corresponden o llegan incluso a no ver nada significativo en ellas.

Lo anterior se pone de relieve en los resultados obtenidos en el proyecto de investigación "Enunciación y significación de las matemáticas en la educación básica", donde se puso en juego una serie de situaciones de aula, con alumnos del grado tercero de cuatro instituciones educativas de la ciudad de Cali (Valle del Cauca). Para su resolución, cada una de estas situaciones exige tener en cuenta las posibilidades heurísticas permitidas por el registro de representación semiótico de las figuras. En los procedimientos explicitados por los alumnos se observó que un porcentaje muy alto de la población participante, tiene un casi total desconocimiento de los tratamientos permitidos por las figuras. En aquellos casos donde se hizo uso de este recurso, los alumnos accedieron a las posibilidades figúrales pero en su mas baja racionalidad. Respecto al primer caso se identificó, entre otros aspectos, que para la mayoría de los alumnos participantes las figuras tienen un carácter estático, es decir, para ellos hay un total desconocimiento de que la organización perceptiva de una figura puede ser cambiada mediante la introducción física o mental de trazos y que de esta manera se puede dar lugar a nuevas subfiguras o inhibir las ya dadas. También se identificó en casi la totalidad de los alumnos participantes un gran desconocimiento en cuanto a las posibilidades que tiene una figura de ser dividida en las diferentes subfiguras que la componen y que ellas sean susceptibles de ser trasladadas y/o rotadas tanto al interior de la figura como al exterior de esta. De igual manera se observó una total ignorancia en que mediante estas transformaciones la figura de partida puede ser convertida en otra de contorno global diferente y en consecuencia la imposibilidad de poder discriminar entre las diferentes posibilidades de transformación de una figura aquellas que sean potentes y pertinentes al problema planteado. Más adelante presentaremos algunas de estas actividades y trataremos más a fondo tanto los anteriores como otros aspectos.

¿Por qué, al enfrentar situaciones donde las figuras pueden jugar un papel heurístico, los alumnos no pueden acceder a estas posibilidades que ellas brindan y, por tanto, el recurso a las figuras como soporte intuitivo es dejado de lado o juega en su más baja racionalidad?

Son varios los elementos que se han de tener en cuenta para tratar de responder tal pregunta. En primer lugar, hay que tener presente que para la mayoría de los profesores, el papel de ayuda o apoyo didáctico que juegan las figuras en la enseñanza de la geometría, se fundamenta en la creencia popular que basta con venas para acceder al contenido representado y, por tanto, no se consideran objetos de enseñanza. En la única etapa escolar que existe una intencionalidad de enseñanza de este registro semiótico es en la etapa preescolar, pero está más orientada al desarrollo de la motricidad fina y al reconocimiento de figuras por parte del alumno, que al desarrollo de algún tipo de racionalidad de orden geométrico. Posteriormente, en los cursos de educación básica primaria, los alumnos deben, a partir de ese reconocimiento visual y de esa actividad motora adquirida, entender todas las posibilidades que brindan los dos registros. Por lo tanto para que un alumno pueda discriminar los diferentes tratamientos que permite el registro semiótico de las figuras y de esta manera acceder a las figuras como verdaderos soportes intuitivos en el desarrollo de actividades matemáticas, es indispensable y urgente abrir espacios específicos en los currículos escolares, dirigidos a la enseñanza de este registro.

> *La condición previa para la descripción precisa de los diferentes tratamientos matemáticos pertinentes en el registro de las figuras geométricas es un análisis semiótico relativo a la determinación de las unidades de base constitutivas de este registro, a las posibilidades de su articulación en figuras y a las modificación de las figuras obtenidas. Estos tratamientos son importantes puesto que es su ejecución, en parte no consciente, lo que permite a las figuras cumplir su función heurística. La descripción de estos tratamientos es igualmente importante para la enseñanza puesto que la mayoría, como lo veremos, no pueden llegar a ser dominados sin un aprendizaje específico*[9]

Un segundo aspecto se relaciona con el hecho de que no basta con que un alumno pueda acceder a los diferentes tratamientos que permiten las figuras, es decir, que pueda realizar trazos sobre una figura, dibujar sobre ella subfiguras, realizar transformaciones y rotaciones, transformar una figura dada en otra figura de contorno global diferente. Es también necesario que pueda discriminar sobre la figura dada aquellas transformaciones que por su naturaleza son pertinentes, potentes y económicas en la solución del problema planteado. Ocurre con frecuencia que para los estudiantes no es fácil ver sobre una figura las relaciones o las propiedades relativas a las hipótesis dadas y que corresponden a la solución buscada. El hecho de que se puedan identificar tres formas, cada una de naturaleza diferente, de discriminar en una figura geométrica las relaciones existentes entre los elementos constituyentes; la existencia de factores que dificultan o posibilitan la visualización tanto de las subconfiguraciones como de las transformaciones figurales pertinentes para la solución del problema planteado y la existencia o no de una congruencia semántica[10], resaltan en gran manera la complejidad cognitiva que subyace a la movilización del registro semiótico de las figuras. En las páginas que sigue haremos un acercamiento a algunos de estos aspectos.

[10]De acuerdo con Duval, la congruencia semántica alude al hecho de que el anclaje producido por la aprehensión perceptual sobre la figura, es decir, las subconfiguraciones, subfiguras y unidades figurales que la figura "muestra", son las mismas a las que el enunciado refiere. La no congruencia semántica es uno de los factores más importantes que aumentan la complejidad cognitiva al ver sobre una figura. Otro aspecto que aumenta esta complejidad y que se encuentra relacionado con el anterior, tiene que ver con que de manera conjunta, en caso de la existencia de una congruencia semántica, o de forma separada si esta no está presente, tanto la consigna como la aprehensión perceptual de la figura produzcan un anclaje sobre aquellas subconfiguraciones, subfiguras, unidades elementales y transformaciones de la figura que no son pertinentes y potentes en la solución del problema planteado.

Para describir cuál puede ser el aporte “heurístico” de una figura en un problema de geometría, se debe distinguir el tipo de aprehensión susceptible de sugerir la solución del problema. Duval ha mostrado que una misma figura puede dar lugar a aprehensiones de naturaleza diferentes[11]: Aprehensión perceptiva, aprehensión operatoria y aprehensión discursiva. Y que en algunos casos estas formas de discriminación se subordinan unas a las otras, se relacionan y en otros se oponen[12].

A continuación nos centraremos en estos tres tipos de aprehensión.

Aprehensión Perceptiva

En este nivel se reconocen, de manera automática e inmediata, las diferentes unidades figúrales que son discernibles en una figura dada. Esta forma de aprehensión está ligada a las leyes gestálticas de organización de la percepción: cuando las unidades figúrales de dimensión 2 están separadas, su reconocimiento no tiene ningún tipo de dificultad, pero no sucede lo mismo cuando se encuentran integradas en una configuración. Esto sucede por dos razones diferentes. En primer lugar, algunas unidades figúrales de dimensión 2 predominan sobre otras unidades también de dimensión 2, de conformidad con la ley gestáltica de cierre. En segundo lugar, una figura geométrica contiene, con frecuencia, más unidades figúrales elementales que las requeridas para construirías. La figura dada con el enunciado del problema que se presenta abajo (problema 1) permite mostrar de manera clara lo que se ha descrito anteriormente.

Problema 1. Si A’C’ y AC son paralelas, A’B’ y AB son paralelas, B’C’ y BC son paralelas, Probar que A es el punto medio de B’C’

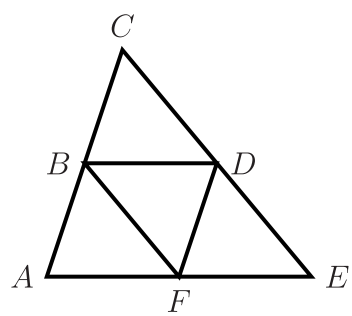


Figura 1

Para resolver este problema se han de discriminar en la figura los paralelogramos

[11] DUVAL, R. Approveche Cognitive des Problémes de geometría en termes de congruence. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. 1998.

[12] Ibid. p. 71-72

BCAC' y BCB'A, pero estas son las unidades figúrales menos visibles en la figura. En virtud de la ley de cierre, en la figura se ve espontáneamente un triángulo pequeño inscrito en uno grande, o un mosaico de cuatro triángulos pequeños independientes. En palabras de Duval, para reconocer tres paralelogramos es necesario, de una parte, neutralizar la organización perceptiva que hace predominar los contornos triangulares sobre los contornos de los cuadriláteros, y ver separadas unidades figúrales que de hecho se recubren parcialmente y que por tanto tienen parte de su contorno en común. Por otra parte, la figura tiene seis unidades figúrales de dimensión 1 (A'C'; A'B'; B'C'; AC; CB y BA) las cuales han sido designadas y enumeradas en el enunciado del problema; son las unidades que han de tenerse en cuenta para trazar la figura. Pero, al mismo tiempo, aparecen once unidades figúrales de dimensión 2 (cinco triángulos, tres paralelogramos y tres trapecios), seis unidades figúrales de dimensión 0 (los vértices del triángulo A'B'C' y los puntos B,C,A).

La aprehensión perceptiva puede tener un rol facilitador o inhibidor en la comprensión de un problema. En el problema anterior se observa que este tipo de aprehensión juega un rol inhibidor: impide la discriminación de los dos paralelogramos que se deben movilizar para resolver el problema planteado.

Aprehensión Operatoria

Las posibilidades de exploración heurística que permiten las figuras y que en gran parte brindan todas las posibilidades que hemos descrito en párrafos anteriores, se encuentran íntimamente relacionadas con la gama de modificaciones posibles que se pueden realizar sobre una figura: una figura de partida se puede dividir en diversas subfiguras a partir de las cuales se puede transformar en otra figura de un contorno global diferente o no. Las modificaciones que tienen estas características son modificaciones mereológicas, que ponen en juego las relaciones existentes entre las partes y el todo. Cuando se agranda, disminuye o se deforma la figura inicial, hablamos de modificación óptica, que transforma una figura en otra apelando a su imagen; "esta transformación, que es realizable como un juego de lentes o de espejos, puede conservar la forma de partida o alterarla"[13]. Por otro lado, también es posible desplazar o rotar tanto la figura de partida como las subfiguras que la componen, en relación con la orientación del campo en el que se destaca. Cuando esto sucede, hablamos de una modificación posicional. La aprehensión operatoria de las figuras es "una aprehensión centrada sobre las modificaciones posibles de una figura de partida y por consiguiente sobre las re-

[13]Ibid.p.62

organizaciones perceptivas que estas modificaciones introducen"[14]. Por cada modificación existen varias operaciones[15] (tabla#1) cognitivas que no matemáticas, brindan a las figuras su productividad heurística. "La productividad heurística de una figura, en un problema de geometría, hace relación a que haya una congruencia entre una de las operaciones y uno de los tratamientos matemáticos posibles del problema propuesto"[16]. En otras palabras, podríamos decir que es a partir de las modificaciones que se producen en una figura por la aplicación de una operación cognitiva determinada que se generan ¡deas, procesos y posibilidades que permiten reconocer los tratamientos matemáticos que se deben aplicar para resolver la actividad. Son ellas, las operaciones cognitivas, las que constituyen la productividad heurística de las figuras. Sin embargo, para que los alumnos puedan hacer uso de las potencialidades que brinda el hecho de que una figura juegue un rol heurístico en la resolución de un problema de geometría, no basta que una figura sea productiva heurísticamente; suele suceder que los alumnos no logran ver la operación u operaciones pertinentes en la resolución del problema. Se ha encontrado la existencia de factores que facilitan, o por el contrario, dificultan la visibilidad de la operación u operaciones pertinentes en la resolución de problemas de geometría.

Tipo de modificación configural	Operaciones constituyentes de la productividad heurística	Factores que juegan sobre la visibilidad
Modif. Mereológicas	Reconfiguración. Configuración	Carácter convexo o no convexo de las partes elementales
Modif. Ópticas	Superponibilidad. Anamorfosis	Recubrimiento parcial. Orientación
Modif. Posiciónales	Rotación. Traslación	Estabilidad del señalamiento del campo. Perceptivo para el soporte de la figura.

Tabla 1

[14]Ibid.p.62

[15]Cada una de estas modificaciones es realizable de forma física, gráfica o mental. El tipo de modificación escogido permite transformaciones de distinta naturaleza en las figuras, cuyo carácter es independiente entre sí.

[16]lbid.p.62

Reconfiguración y factores de visibilidad

La reconfiguración es la operación que consiste en reorganizar una o varias subfiguras diferentes de una figura dada en otra figura. Una subfigura puede ser una unidad figural de dimensión 2 o un reagrupamiento de unidades elementales también de dimensión 2. Las subfiguras pueden aumentar con el fraccionamiento de las unidades figúrales elementales de dimensión 2 que componen a la figura de partida. *La reconfiguración es un tratamiento que consiste en la división de una figura en subfiguras, en su comparación y en su reagrupamiento eventual en una figura de un contorno global diferente.* Así es como esta operación interviene en la productividad heurística de las figuras geométricas.

Un ejemplo de resolución de un problema por reconfiguración

En el siguiente problema veremos cómo la operación de reconfiguración juega como una herramienta heurística en la resolución de un problema geométrico.

Problema 2. En la siguiente figura, AC es la diagonal del rectángulo ABCD. Compare las áreas de los dos rectángulos grises.

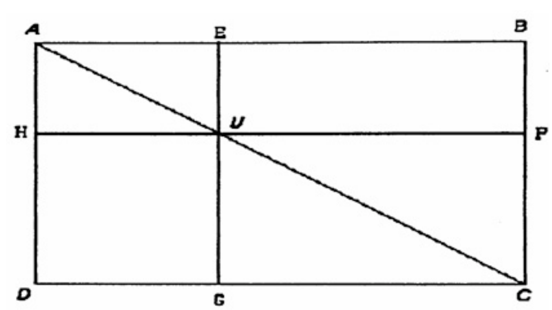


Figura 2

La resolución de este problema pone en juego una tarea de comparación de áreas. La respuesta no es evidente. En efecto, desde un punto de vista estrictamente perceptivo, dos superficies no parecen equivalentes si no son isométricas, es decir, si no tienen la misma área y no coinciden por superposición. La pregunta planteada centra la atención en los rectángulos sombreados que no son superponibles entre sí, por lo cual a simple vista no parecen equivalentes. Un procedimiento que a la vez da y justifica la resolución del problema, reposa en la división de la figura de partida en dos subfiguras iguales, los triángulos ABC y ACD, y la posterior “sustracción” a cada una de ellas de dos configuraciones iguales entre sí: la figura de partida (rectángulo ABCD) se divide en los triángulos iguales ABC y ACD, luego, a estos se les sustrae las configuraciones ¡guales AEUFCUH y AUCGUH. De la anterior operación sustractiva y por pasaje a la complementariedad[17] se llega a la conclusión de que las dos partes sombreadas son iguales.

Otro método de resolución consiste en la resta sucesiva de dos partes elementales de la figura de partida a cada uno de los triángulos ABC y ACD: a éstos se sustrae los triángulos AEU y AUH respectivamente; como estos triángulos son ¡guales entre sí, entonces las dos figuras resultantes(EBCU y HUCD) serán ¡guales entre si. Por último, a la figura EBCU se le quita el triángulo UFC y a la figura HUCD se le quita el triángulo UCG, concluyendo que las dos figuras sombreadas tienen igual área.

El anterior ejercicio muestra cómo la operación de reconfiguración permite “ver” el derrotero de resolución de la actividad: es a través de la aplicación de diferentes reconfiguraciones y sobre las comparaciones entre ellas, que se generan ideas que permiten explicar y justificar su resolución. Es a esto a lo que se hace referencia cuando se dice que las figuras son un soporte intuitivo en la resolución de problemas de geometría. Es importante aclarar de inmediato que el hecho de que los estudiantes puedan encontrar una justificación de los procedimientos seguidos para la resolución del problema geométrico fundamentada en las transformaciones de las figuras, no implica que automáticamente estén en condiciones de demostrar el resultado. Pero es a través de tales justificaciones que se pueden guiar sus pasos hacia una demostración. Sin embargo, encontramos que cuando los alumnos se enfrentan a problemas de geometría no es nada espontáneo que tengan elementos para acceder a las figuras, para ver algo en ellas. O bien desconocen sus características (conformación, posibilidades de transformación de una figura en otra y las característica propias de los cambios del registro de las figuras con el de la lengua natural y lenguaje simbólico, entre otros), o bien hay diferentes factores que aumentan o disminuyen la visibilidad de determinadas operaciones, cuya aplicación sobre la figura permite transformarla en otra, con una organización perceptiva que permite utilizarla con mayor potencia en la resolución de un problema determinado. A estos factores se les conoce como factores de visibilidad (Duval, Mesquita, Padilla). Se ha demostrado que estos factores de visibilidad inciden en los tiempos de respuestas y, por tanto, en la complejidad cognitiva que subyace en la resolución de problemas geométricos[18].

[17]Dos superficies tienen la misma área si ellas resultan de una “sustracción” de superficies parciales iguales a las superficies totales Iguales.

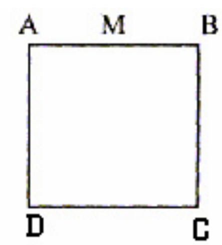
[18]Padilla, V. Uinfiuence d’une acquisition de traitements purement figuraux pour 1’aprentissage des mathématiques. Thése U.L.P.: Strasbourg.

Factores de visibilidad de la operación de reconfiguración

La operación de reconfiguración puede efectuarse de varias maneras sobre una figura dada. Diferentes factores influyen sobre el discernimiento de la aplicación pertinente de esta operación. A continuación presentamos de forma textual los factores de visibilidad descritos por Padilla[19] en sus investigaciones:

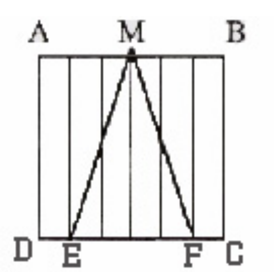
Que el fraccionamiento de la figura de partida en partes elementales sea dado al inicio o que deba ser encontrado.

Ejemplo. en el problema siguiente: *dividir un cuadrado en tres partes iguales, realizar la partición a partir del punto medio* (M) *del lado AB.*



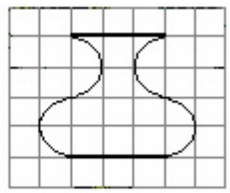
La figura demanda la utilización de tratamientos auxiliares, que consisten en trazar segmentos (o líneas, eventualmente), para tener más partes elementales (cuadrados o triángulos) que no tiene la figura de partida, esto es, la figura correspondiente al objeto sobre el cual parte el enunciado del problema. Ya sea porque el enunciado demande un fraccionamiento de la figura de partida, o no se sugiera ninguno, la aplicación de la operación de reconfiguración exige, entonces, efectuar trazos suplementarios auxiliares sobre la figura.

Otra situación:*ABCD es un cuadrado partido en bandas ¡guales. Pruebe que las áreas AMED, MEF, y MBCF son iguales.* En este enunciado la operación de reconfiguración puede hacerse directamente sin recurrir a trazos suplementarios.



[19]Ibid, pp. 27-32

Que la figura de partida sea designada sobre un fondo cuadriculado o sobre un fondo no-cuadriculado.

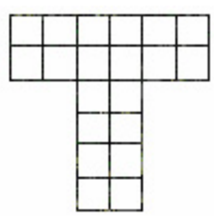


Se ha observado que el soporte cuadriculado es una ayuda para la aplicación de la operación de reconfiguración. El fondo cuadriculado induce dos tipos de procedimientos: la reconfiguración de pequeños cuadrados y la reconfiguración de la forma global en otra forma global.

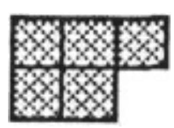
- Que el reagrupamiento pertinente de las partes elementales forme una reconfiguración convexa o no convexa.

En una figura, es más difícil destacar una sub-figura no convexa que una sub-figura convexa, ya que la no convexidad no respeta la ley gestáltica de simplicidad del contorno. (Mesquita A. 1989, p 72).

Ejemplo. *Este figura está formada por cinco cuadrados ¿Puedes descomponerla en cuatro pedazos superponibles entre sí? Marque los trazos de descomposición sobre la figura.*



Los reagrupamientos pertinentes de las partes elementales forman sub-figuras no convexas.



Se ha constatado que este factor juega un papel importante para discernir entre varias reconfiguraciones posibles la que es matemáticamente pertinente. (Padilla, 1990, p. 232-238).

- El número de modificaciones posicionales (rotaciones y traslaciones) a efectuar sobre la subfigura clave para llegar a una adecuada colocación.

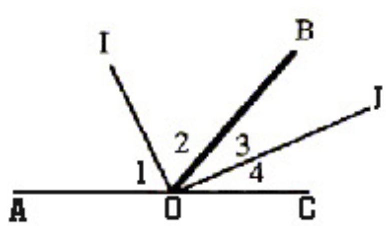
Por ejemplo, en el problema anterior, se deben efectuar tres rotaciones de la sub-figura clave para llegar a una buena resolución del problema.

Este problema se planteó en el examen de evaluación del programa de matemáticas al final del grado sexto realizado en 1987 por la APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de I' Enseignemente Public, Francia), con un éxito del 22 %. Sin tomar en cuenta este factor, el problema fue considerado "una tarea poco fácil".

- Que una misma parte elemental deba entrar simultáneamente en dos reagrupamientos intermediarios a comparar.

Es esto lo que R. Duval ha llamado **el obstáculo de desdoblamiento de los objetos.** "El desdoblamiento de un objeto dado, practica tan trivial como necesaria en la identificación de un mismo objeto bajo varias expresiones o puntos de vista diferentes, constituye un obstáculo que una buena parte de los alumnos no cesa de encontrar en las diversas situaciones de aprendizaje que le son planteadas"(Duval R..1983, p.387)

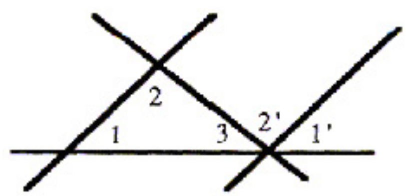
Ejemplo. IO y OJ son respectivamente las bisectrices de los ángulos AOB y BOC, ¿cuál es el valor del ángulo IOJ? ¿Por qué?



Las partes elementales 2 y 3 se encuentran simultáneamente en dos reagrupamientos intermediarios: IOJ y AOB para la parte elemental 2, IOJ y BOC para la parte elemental 3. R. DUVAL, ha observado que esto constituye un real obstáculo para ciertos alumnos: ellos no pueden ver y comprender que *un mismo objeto puede estar al mismo tiempo en dos reagrupamientos diferentes que se busca comparar.*

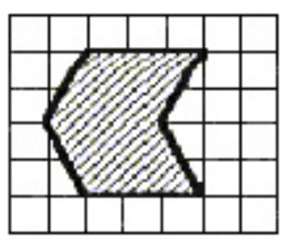
- Que el reagrupamiento pertinente exija que se sustituyan las partes elementales auxiliares a las cuales el enunciado del problema refiere.

Para mostrar, por ejemplo, que la suma de los ángulos de un triángulo es 180 grados, se reconfiguran los ángulos del triángulo en un ángulo llano; esta reconfiguración exige la sustitución de las partes 1' y 2' por 1 y 2 respectivamente. (R. Duval, 1988, pp. 66-68)

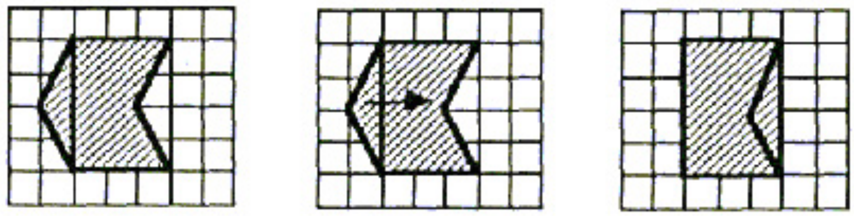


Que la operación de reconfiguración solo tome en cuenta las características del contorno. ¿Las propiedades del contorno de la figura son una ayuda para la aplicación de la operación de reconfiguración?

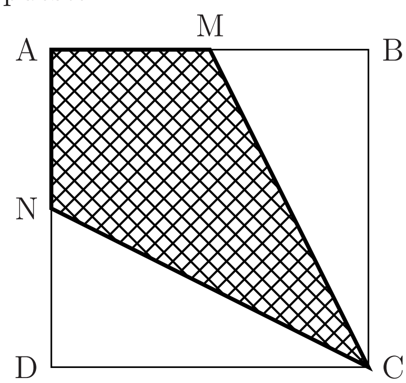
Ejemplo. Calcular el área de la figura sombreada, (área de cada cuadrado de la cuadrícula: 1 cm^2).



Independientemente del fondo, cuadriculado o no, el contorno de la figura representa una ayuda para la aplicación de la operación de reconfiguración. La figura es no convexa: le "falta" un triángulo. Una mirada gestáltica sobre la figura nos muestra dónde se encuentra el triángulo que falta y, para regularizar la figura, se puede realizar un ensamblaje de los triángulos.



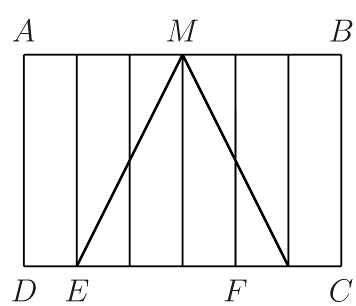
Pero veamos esta situación: La siguiente figura representa al cuadrado ABCD con M y N puntos medios ¿Cuál es la fracción que representa la parte sombreada del cuadrado? Explica tu respuesta.



En este caso, las características del contorno no son una ayuda para la aplicación de la operación de reconfiguración.

- Que todas las subfiguras deban ser desplazadas al interior de la figura de partida, o al contrario, que algunas subfiguras deban salir de ese contorno.

Los tipos de desplazamientos a efectuar sobre las sub-figuras pertinentes se relacionan con el contorno de la figura. En efecto los desplazamientos pueden efectuarse al interior o al exterior de ella, en función de su contorno. Ejemplos: En uno de los problemas presentados atrás, una pareja de alumnos de la clase de 6° realizan el siguiente razonamiento:

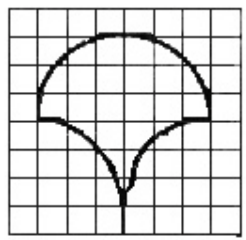


El pedazo H puede ponerse en el lugar G y, recíprocamente, el pedazo I puede ponerse en el lugar K. Se obtienen entonces dos bandas iguales.

Para reconfigurar las bandas, las subfiguras pertinentes han sido desplazadas al interior de la figura de partida, el cuadrado ABCD.

¿Cuál es el área (en cuadrados) de esta figura?

Una pareja de alumnos de la clase de sexto hizo el siguiente razonamiento:



Para reconfigurar la figura dada en un rectángulo global, las subfiguras han sido desplazadas al exterior del contorno de la figura de partida.

Estos factores permiten evaluar el grado de visibilidad de la reconfiguración pertinente (puesto que son posibles varias reconfiguraciones sobre una misma figura) y de analizar con precisión el grado de complejidad de la aplicación de la operación de reconfiguración.

Aprehensión Discursiva

Es importante tener en cuenta que un alumno al intentar resolver un problema de geometría podría centrarse en los elementos, relaciones y propiedades que muestra la figura, v.g. considerar un ángulo como recto, sin que lo sea, solo por el hecho de que su forma se asemeja a la de un ángulo de medida 90 grados. Por lo tanto, se debe tener en cuenta que las figuras por sí mismas no constituyen un registro de tratamiento autónomo, es decir, que no es a partir de sus trazos y formas que la figura permite su acceso en la resolución de un problema geométrico. La aprehensión discursiva es una aprehensión que se encuentra ligada a las propiedades asociadas a las hipótesis. Las propiedades de una figura geométrica dependen de lo que se enuncia como hipótesis. La aprehensión discursiva de una figura es inseparable de una doble referencia: por un lado, a una red semántica de objetos matemáticos y, por otra, a una axiomática local. Es en este sentido que está indisociablemente ligada a las aserciones correspondientes del enunciado. Dicho de otro modo, la aprehensión discursiva de una figura privilegia exclusivamente el estatus que el enunciado concede a sus proposiciones.

Esta forma de aprehensión implica una subordinación de la aprehensión perceptiva a la aprehensión discursiva, y como consecuencia una restricción de la aprehensión perceptiva: las propiedades de las figuras no son impuestas a partir de los trazos y las formas de una figura, sino a partir de las propiedades mencionadas en el enunciado. En relación con la aprehensión operatoria, cuando existe una congruencia entre esta aprehensión y un tratamiento matemático posible del problema, la aprehensión discursiva puede ser dejada de lado. Pero si no hay tal congruencia, se hace necesaria la aprehensión discursiva. Es en este caso cuando los alumnos se encuentran enfrentados a una tarea de demostración.

El Área De Superficies Planas: Un aspecto crítico en la educación matemática colombiana

El Ministerio de Educación Nacional a través del documento *Matemáticas: Lineamientos Curriculares*, pretende dar elementos para que las instituciones educativas se orienten en el diseño y desarrollo del currículo, dentro del respectivo PEÍ. Entre estos elementos, proponen considerar tres grandes aspectos, entre los cuales se encuentra el de los conocimientos básicos, es decir, aquellos conocimientos "que tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas"[20] . Estos procesos específicos se encuentran relacionados con el desarrollo de distintos tipos de pensamiento: numérico, espacial, métrico, entre otros. Los sistemas son los que se propusieron en la renovación curricular: numéricos, geométricos, de medida, etcétera.

Uno de los sistemas en los que ha sido más crítico o por lo menos más notable el bajo nivel de logros alcanzados, es el relacionado con los sistemas de medida. Estos bajos resultados se relacionan, por un lado, con algunas características que se dan en la enseñanza de la medida en las instituciones escolares[21]: la desatención de la geometría como materia de estudio en las aulas, el tratamiento de los sistemas métricos desde concepciones epistemológicas y didácticas sesgadas, la introducción a la medida bajo la utilización de instrumentos refinados y complejos descuidando la construcción de la magnitud y el desarrollo de procesos de medición, y el desconocimiento del desarrollo histórico de la medida. Por otro lado, con las diversas dificultades que para los alumnos conllevan las ideas de las nociones

[20]MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Matemáticas: Lineamientos curriculares. Santa fe de Bogotá. Panamericana Formas e impresos. 1998. p. 35

[21]Ibid. p. 62

de medida[22]: la no comprensión de la relación entre el tamaño de la unidad escogida y el número de veces necesario para recubriría en una longitud, superficie o espacio dado; la falta de una comprensión adecuada de las diferentes unidades estándar de medida, tanto en su tamaño, como las respectivas conversiones entre ellas; el no uso de diferentes tipos de unidades para medir el perímetro o el área de una superficie dada y el volumen de un sólido; los problemas diseñados con fines educativos, típicos de las matemáticas escolares, pueden ir en detrimento de la comprensión de la verdadera naturaleza del proceso de medida ya que se dejan por fuera los juicios sobreestimación, aproximación, error... pues lo que preocupa son los aspectos numéricos y de recuento: la no captación de la idea de conservación en los diferentes contextos de cada uno de los sistemas de medidas; y la incapacidad de distinguir magnitudes diferentes.

En las pruebas del TIMSS/96[23], se evalúa la medición desde tres tópicos diferentes: evaluación del concepto de medida y unidades estándar (se tiene en cuenta las medidas de longitud, área y volumen); los conceptos de perímetro, área y volumen, así como las fórmulas para determinar estas medidas; estimaciones y errores en el proceso de la medida. Profesores de la Facultad de Ciencias y del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle con la colaboración de profesores de diversas universidades y de la Asociación de Profesores Procalidad de la Educación en Santa fe de Bogotá, analizaron los resultados a nivel nacional y los confrontaron con los resultados internacionales. En lo correspondiente a la medición se encontró que los estudiantes colombianos están preparados para resolver bien solo un 15 % o 20 % de las preguntas del área, mientras que los estudiantes internacionales están preparados para resolver el 52 % de ellas[24]; a partir del análisis de los resultados de las preguntas que tienen que ver con el área de figuras planas se concluyó que "La mayoría de los estudiantes colombianos no están familiarizados con la estrategia básica de descomposición de figuras en figuras más simples, para facilitar el cálculo de volúmenes, áreas o perímetros ... Hay además indicios de que se presentan confusiones entre los conceptos de área y perímetro ... puede haber dificultades con las fórmulas para calcular áreas de figuras como triángulos y rectángulos..."[25]

No es casual que el área de superficies planas sea la medida a la cual se le asigna mayor cantidad de tiempo y que se le da mayor importancia en la educación

[22]DICKSON, Linda; BROWN, M; y GIBSON, O; El aprendizaje de las matemáticas. Barcelona, Editorial Labor, S.A, 1991

[23]Para evaluar el aprendizaje de las matemáticas a nivel internacional, el T.I.M.S.S./96 utiliza una prueba, la cual está basada en 151 preguntas, de las cuales 21 evalúan la medición.

[24]Ibid. p. 121

[25]lbid. p. 125

básica[26] : Este tipo de medida juega un papel de gran relevancia en lo que concierne a la construcción de nuevos conceptos, así como al desarrollo de pensamiento matemático. El área de una figura sencilla como el rectángulo, muestra el importante papel que juega el área de superficies planas en la construcción y representación de tros objetos y conceptos matemáticos: permite la representación del producto entre dos números naturales, entre dos expresiones decimales. Al ser dividida en partes Iguales se utiliza para representar el concepto de fracción y la noción de fracciones equivalentes, la operación de suma y producto entre fracciones también pueden ser representadas mediante este modelo, así como la noción de porcentaje. De igual manera es posible representar gráficamente las propiedades aritméticas expresadas simbólicamente como la propiedad distributiva del producto respecto a la suma o del desarrollo del cuadrado de un binomio.

El área de superficies planas permite la medida de otros tipos de magnitud (v.g. el volumen de cuerpos sólidos); así mismo, permite una demostración sencilla del teorema de Pitágoras y del teorema fundamental de la proporcionalidad, del cual depende la teoría de la semejanza. Sirve de base para la construcción del concepto e área bajo una curva, el que conduce al concepto de integral definida. Sin duda, el área de regiones planas es un elemento de gran importancia en la construcción de pensamiento matemático en la básica primaria y media.

Las diversas dificultades con las que se encuentran los estudiantes para la comprensión del área de superficies planas, la presencia e importancia de este objeto matemático en el currículo escolar y el hecho de que la enseñanza "tradicional" no ha logrado avances significativas que permitan mejores resultados, resaltan la importante y urgente necesidad de realizar estudios y propuestas desde nuevas perspectivas teóricas que permitan identificar aquellos factores que intervienen en el aprendizaje de las áreas de superficies planas, así como desarrollar análisis e interpretaciones que a su vez sugieran algunos lineamientos que permitan a los educadores matemáticos un reconocimiento de esta necesidad y que den elementos para el diseño de futuras propuestas para la enseñanza de esta temática.

Lo anterior junto con:

- El creciente interés por parte de investigadores y maestros, nacionales e internacionales, por el "rescate" de la geometría en los currículos escolares.
- La importancia de un aprendizaje explícito y específico de los tratamientos

[26]Basta observar los currículos establecidos en las diferentes instituciones escolares, los textos escolares, estándares y diferentes pruebas internacionales y nacionales de matemáticas para percatarse de que el papel que se le asigna al área, está muy por encima de otros tipos de medida

en el registro semiótico de las figuras que posibilite su coordinación con el registro de la lengua natural (característica esencial para un aprendizaje de la geometría).

- La complejidad que subyace a la comprensión de los contenidos matemáticos que se pueden representar a través del registro figural.
- Los resultados de investigaciones sobre las actividades cognitivas en el aprendizaje de las matemáticas[27], que han permitido constatar que una enseñanza centrada en la explicación de los tratamientos propios de los registros de las figuras desarrolla en los alumnos habilidades de razonamiento y de argumentación que les hace accesibles los modos de producción desconocimiento matemático y, lo que es más importante, les permite ser autónomos y creativos.

Nos ha llevado a considerar que una construcción del área de superficies planas desde una perspectiva semiótica y cognitiva es un camino propicio, a pesar de lo poco explorado en nuestro medio, para que los alumnos desde los primeros grados de la educación básica logren hacer de las representaciones figúrales una verdadera y potente herramienta heurística que les permita ganar en la comprensión de los objetos geométricos. A través de la puesta en juego de diferentes procesos de visualización se aprende a ver, aún en aquellos casos en que no hay congruencia semántica o que la presencia de factores de visibilidad obstaculice dicha visualización. De igual forma, y como una consecuencia de lo anterior, apostamos a que a través de este tipo de aprendizaje se hacen posibles nuevos y mejores caminos hacia un aprendizaje significativo del área de superficies planas.

A continuación describiremos un par de situaciones de aula que fueron puestas en juego con aproximadamente 150 alumnos de grado 3° de cuatro instituciones educativas de la ciudad de Cali. Las instituciones fueron escogidas al azar y no tienen vínculos entre ellas. En este contexto, resulta altamente llamativo la homogeneidad de los procedimientos que utilizaron los alumnos y la dificultad que presentaron sus profesores para acompañar discursivamente a los estudiantes en sus

[27]DUVAL, R. Graphiques et équqtíons. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1.1988.
DUVAL, R. Semiosis y pensamiento humano. Traducción realizada por Myriam Vega Restrepo, Cali: Universidad del Valle, 1999
ESQUITA, A. Sur une situation d'évei'1 á la deduction en geometría. Educational Studies ¡nMathematics. 1989.
ESQUITA. A. Linfluence des aspects fíguratifs dans lárgumentation des eleves en géométríe:éléments pour une typologie. Thése U.L.P.: Strasbourg. 1989.
PADILLA. V. Linfíuence dé une acquisition de traitements purement figuraux pour1'apprentissage des mathématiques. These U.L.P.: Strasbourg. 1992.

intentos por resolver las situaciones. A pesar del trabajo previo de presentación, discusión y análisis de las situaciones con los profesores y el acuerdo para que estas situaciones fueran implementadas como parte integral de enseñanza en la clase de matemáticas, no ocurrió, que los maestros pudiesen elaborar un discurso que acompañara y alentara los procedimientos de los alumnos en sus intentos por solucionar los problemas. En breve, para los maestros, cuando hay figuras no hay necesidad de hablar. Las figuras hablan por sí mismas.

A partir de los diferentes procedimientos empleados por los alumnos pondremos de relieve que la visualización es un asunto de gran complejidad y que muy lejos están aquellos que piensan que ver sobre una figura es un asunto obvio y espontáneo y que por el contrario es un acto cognitivo susceptible de aprendizaje.

2. Descripción de las Situaciones

Cada situación (Anexos 1 y 2) se presenta con un enunciado en lengua natural y una figura sobre un fondo cuadriculado, a la cual la resolución del problema exige que Geometría: figuras, áreas y visualización juegue un papel heurístico. Los conocimientos matemáticos necesarios para resolverlas situaciones propuestas son mínimos y básicos para los alumnos de grado 3°. No requieren de ningún razonamiento que exija la utilización de definiciones, teoremas, propiedades y fórmulas matemáticas. A pesar que la intención en cada actividad esquí los alumnos reflexionen sobre el área de superficies planas, en las consignas tose hace referencia explícita de este objeto matemático; por el contrario, se le refiere de forma implícita a través del uso de expresiones que de una manera u otra ponen en relieve la comparación directa entre figuras a partir de sus superficies: *¿cuál de las dos tiene mayor superficie?* *y ¿Dónde se gastó mayor cantidad de pintura?* El grado de potencia heurística que brinda la figura, en cada caso, es alto: permite varías posibilidades de transformación pertinentes a la resolución del problema propuesto.

Cada situación demanda una explicación y justificación que busca poner en acto la explicitación de los diversos procedimientos, estrategias y tratamientos puestos en juego por los alumnos, así como los argumentos sobre los cuales se sustentan para resolver el problema.

La complejidad cognitiva presente en estas dos situaciones se relaciona con varios aspectos:

1. En los dos casos no existe una congruencia semántica entre el enunciado en lengua natural y la figura: En las dos situaciones la consigna introduce un

anclaje sobre dos superficies distintas, la superficie blanca y la superficie gris. Contrariamente, sus figuras llevan a que estas sean vistas, de forma espontánea, como un mosaico de cuadrados grises y blancos independientes entre sí. El anclaje en este caso es introducido a través del color y el fondo cuadriculado sobre el cual está dada la figura. Además, en relación a la superficie gris de la cual se hace referencia en los dos enunciados, la figura no introduce un anclaje sobre una sola superficie sino, que por el contrario, introduce un anclaje sobre varias superficies grises: en la figura de la primera situación se pueden discriminar 16 cuadrados grises, de igual manera en la figura dada en la segunda situación se pueden reconocer seis figuras: cuatro peces y dos caballos de mar.

2. Sea cual fuere la transformación por la que se opte, es necesario neutralizar en la figura su organización perceptiva, pues esta hace predominar los contornos de los cuadrados grises y de los cuadrados pequeños blancos sobre cualquier contorno de las subfiguras pertinentes a la solución del problema planteado. Posteriormente las subfiguras deben ser vistas de forma separada debido a que tienen parte de su contorno en común y finalmente centrar la atención solo en una de ellas.

3. El grado de potencia heurística jugado por la figuras en esta actividad es alto; son posibles varios tipos de transformación pertinentes para llegar a la conclusión de que la zona blanca es mayor que la zona gris: la figura se puede seccionar en diversas subfiguras superponibles entre sí y de esta manera se pueden comparar las dos superficies.

Estas actividades posibilitan diferentes formas de ver sobre una misma figura y de acuerdo a estas formas se desencadenan procedimientos de naturaleza diferentes. A continuación explicitaremos algunas de las formas de visualización que los alumnos adoptaron en sus procedimientos:

3. La Figura Fraccionada en Cuadrados:

Una de las formas más generalizadas de ver sobre las figuras que se identificó en los procedimientos empleados por los alumnos en el desarrollo de estas situaciones, se relaciona de forma directa con dos aspectos: el fondo cuadriculado sobre el cual se encuentra inscrita la figura y el aprendizaje que han tenido los alumnos sobre las posibilidades que las figuras permiten. La figura es vista de forma "cuadriculada" como si fuese un mosaico de baldosas. Esta forma de ver desencadena en la mayoría de los alumnos participantes un solo tipo de procedimiento: el conteo.

A pesar de que esta forma de ver permite llegar a una respuesta, es importante identificar algunos aspectos que la hacen la manera de ver menos propicia en la resolución del problema planteado:

1. Tal como se señaló anteriormente, para la resolución de estas actividades las figuras juegan un rol heurístico. Es a través de las transformaciones permitidas por ellas que se puede llegar a una solución del problema planteado: comparar figuras teniendo en cuenta sus áreas. Sin embargo, cuando los alumnos ven la figura como una serie de mosaicos y adoptan el conteo como única estrategia de solución, suele suceder dos cosas. Por un lado, que la figura no juegue ningún papel heurístico en la solución del problema y, por el contrario, tos procedimientos que comandan el desarrollo de la situación se realizan por entero en el registro semiótico de la escritura aritmética. Por otra parte, el recurso de la figura como una herramienta heurística es asumido pero en una muy baja racionalidad. El primer caso se ve reflejado en el momento en que los alumnos terminan de contar los cuadrados completos, es decir que están totalmente coloreados de blanco o de gris[28], y posteriormente deben enfrentarse al problema de que hay una serie de cuadrados que no están totalmente coloreadas (observar Anexo 2). En este caso, proceden de formas diferentes: cuentan las fracciones de cuadrado como si fuesen unidades completas, o por el contrario las obvian y solo asumen en el conteo los que están completos, o las asumen como la mitad o el cuarto de una unidad, dejando de lado sus formas (triangulares, cuadradas, rectangulares). Posteriormente, por cada dos o cuatro de ellas, respectivamente, completan una unidad. En cada uno de estos procedimientos es claro, que en ningún momento se recurre al registro semiótico de las figuras, sino que, por el contrario, los procedimientos explicitados por los alumnos se dan a través del conteo, el cual, no siempre los condujo a recurrir a un registro semiótico aritmético. El segundo caso se evidencia cuando los alumnos no solo ven la figura como si estuviese fraccionada en una serie de cuadrados superpuestos entre sí, sino que van un poco mas allá, reconocen la existencia de figuras triangulares, cuadradas y rectangulares al interior de cada una de los cuadrados que no están totalmente coloreadas y posteriormente mediante transformaciones (rotaciones y traslaciones) las llevan a aquellas lugares en la figura cuya forma les permite ser encajada y de esta manera conformar un cuadrado completo (de color blanco o gris). Así se obtiene una nueva figura de contorno global distinto al de la figura inicial y el alumno puede proceder a contar uno a uno los cuadrados blancos y grises. En este caso,

[28]En lo que sigue llamaremos cuadrados completos a los que cumplen esta característica y fracciones de cuadrado (o cuadrados incompletos) a los que no.

se ha hecho uso de algunas de las posibilidades que permiten las figuras, se aplicaron traslaciones, rotaciones y por complementariedad de formas se unieron figuras de un mismo color para conformar un cuadrado completo. Sin embargo, una vez realizado este procedimiento la figura es dejada de lado y la conclusión que posteriormente da el alumno se centra por entero, en general, en el conteo y, en algunos casos particulares en el registro de la escritura aritmética. Decimos en este caso que las posibilidades figúrales son puestas en juego en una muy baja racionalidad.

2. El ver de esta manera y utilizar una estrategia centrada exclusivamente en el conteo, desencadena por lo general procedimientos monótonos, extensos y engorrosos. Esto se refleja de forma notable en los procedimientos empleados por los alumnos al intentar desarrollar la situación 2 (los caballos): cuentan uno a uno los cuadrados completos y posteriormente continúan el conteo sobre los incompletos, introduciendo un segundo conteo paralelo: cada cuatro cuadrados pequeños forman un cuadrado completo. Lo anterior conlleva a que además el alumno en su intento de controlar los dos conteos y evitar contar dos o más veces la misma parte, deba introducir signos, colores, tachones y marcas, lo cual disminuye en un alto grado la visibilidad en la figura. Ahora, si no lo hace y trata de mantener el control de forma mental está en gran riesgo de contar mal y totalizar erróneamente.

3. Un tercer aspecto se relaciona con que los alumnos llegan a una respuesta, pero no resuelven el problema propuesto. En el desarrollo de la situación 1, un alumno concluye que la parte que tiene la mayor superficie es la blanca. La justificación que utilizó nos ejemplifica lo dicho anteriormente: "La parte blanca es mayor que la blanca porque 100 es mayor que 80". En este caso, se observa cómo el alumno se centra en una relación de orden entre dos números naturales para llegar a una conclusión. Sin embargo, el problema planteado en la actividad, comparar de forma cualitativa el área de dos figuras mediante las posibilidades que éstas permitan no es resuelto, pues el alumno cambia de lugar el problema y lo lleva no solo a otro tipo de reflexión (comparación entre dos números naturales) sino también a un registro diferente, el de la escritura aritmética.

4. Un último aspecto a tener en cuenta, y que nos indica que ver sobre las figuras de esta manera no es lo más apropiado en la solución del problema planteado, radica en que al asumir como unidad de visualización cada uno de los cuadrados que conforman el fondo cuadriculado lleva a una pérdida de la globalidad de la figura. Es decir, no hay conciencia de la figura como un todo. Veamos cómo esta forma de ver puede convertirse en un obstáculo en cuanto al papel heurístico que la figura puede jugar en la solución

de estos problemas. En el desarrollo de la situación 2, la totalidad de los procedimientos puestos en juego por los alumnos evidencian notablemente este fenómeno. En su afán de totalizar la cantidad de cuadrados que conforman las partes blancas y grises de la figura dada, parece ser que los alumnos no discriminan en ella la presencia de las 6 subfiguras cuyas superficies están coloreadas de gris: cuatro peces y dos caballos de mar (Anexo 2). Tampoco reconocen que tanto peces como caballos, respectivamente, tienen igual forma y superficie, sino que por el contrario, ven en ellos una serie de cuadrados, unos completos y otros incompletos. Esto impide que a partir de un reconocimiento global de la figura, se pueda recurrir a ella como un soporte intuitivo que guíe la solución del problema hacia procedimientos de racionalidades mayores a los establecidos con la aplicación exclusivo del conteo. No es necesario realizar un conteo de cada uno de estos cuadrados que forman la parte de las zonas grises. Basta contar solo los que conforman uno de los peces y uno de los caballos de mar y mediante tratamientos aritméticos (sumas o multiplicaciones) hallar la totalidad de cuadrados que forman esta parte de la figura (cantidad total de cuadrados de la parte gris de la figura $= 4X$ número de cuadrados que conforman uno de los peces $+2X$ el número de cuadrados que conforman un caballo de mar). Posteriormente, mediante tratamientos multiplicativos y sustractivos se puede identificar el total de cuadrados que conforman la parte blanca de la figura (la parte blanca = la figura total ($13X14$ cuadrados) menos la totalidad de cuadrados que conforman la parte gris). Este no solo sería un procedimiento que pone en juego racionalidades de orden superior en los dos registros utilizados, sino que además puede ser más económico y menos engorroso.

Sin embargo, asumir como unidad de visualización estos cuadrados no conduce siempre a una pérdida de la globalidad de la figura. Esto se refleja en el procedimiento adoptado por una pareja de alumnos al desarrollar la situación 1:

Lo que hice fue multiplicar los cuadritos de los cuadros grises (un cuadrado tiene 4 cuadritos) $20 \times 4 = 80$. *Los cuadros blancos los junte y los volví líneas verticales (están formados por dos cuadritos) y horizontales (están formados por 15 cuadritos).*

Los cuadritos de las líneas verticales los multipliqué por dos (20X2) y me dio 40. Los cuadritos de las líneas horizontales los multipliqué por cuatro (15X4/ 60), luego sumo sus resultados y me dio 100. Por eso la parte blanca es la más grande, porque hay más cuadritos blancos.

A pesar de que la estrategia final empleada por estos alumnos fue la de comparar el total de cuadrados blancos con el total de cuadrados grises y de esta manera llegar a una conclusión. La diferencia, en relación a los casos anteriores, radica en el papel que juega la figura, en este caso no se evidencia una pérdida de la globalidad de la figura; por el contrario, los alumnos reorganizan perceptivamente la figura y, de esta manera, pasan de ver un conjunto de mosaicos superpuestos entre sí a ver una sola figura (el rectángulo que sirve de contorno a la piscina) dividida en varias subfiguras: 20 cuadrados (grises); 4 rectángulos (blancos) y 20 rectángulos más pequeños (blancos). Esta forma de ver, sin lugar a dudas, conduce a procedimientos de racionalidades mayores, no solo se hace de la figura una herramienta heurística que da pistas en la solución del problema, sino que además se recurre al uso de tratamientos aritméticos de mayor envergadura que el conteo.

4. Otras Formas de Ver Sobre las Figuras

Hasta el momento hemos identificado en los diferentes procedimientos empleados por los alumnos dos procesos de visualización de naturaleza distinta. El primero se centró en una visualización exclusivamente local. Esta forma de ver introduce el conteo y en algunos casos posibilita transformaciones locales sobre la figura. El segundo proceso parte de una visualización local, pero al contrario que en el primer caso, la globalidad de la figura es tenida en cuenta. De esta manera la figura juega en un nivel de racionalidad superior que en el caso anterior, se constituye en una herramienta heurística que comanda los procedimientos empleados por los alumnos. Sin embargo, aún no se ha recurrido a las posibilidades heurísticas que brindan las figuras en su máxima expresión. A continuación nos referiremos a dos procesos de visualización explicitados por los alumnos y que ponen en juego racionalidades figúrales de orden superior.

Una tercera forma de ver sobre la figura de la situación 1 se centra, al igual que en el caso anterior, en asumir como unidad de visualización el rectángulo que delimita el contorno de la piscina, pero difiere en el hecho de que los alumnos introducen una línea horizontal (en algunos casos vertical) fraccionando el rectángulo en dos subfiguras rectangulares ¡guales (llamados A y B). Luego mediante traslaciones de los cuadrados grises que se encuentran en el rectángulo B recubren las partes blancas de A. Ahora, al finalizar este proceso se dan cuenta que el rectángulo A no quedó por completo recubierto de gris. Por lo tanto concluyen que en la piscina la superficie blanca es mayor que la superficie gris. Un problema que se presenta al proceder de esta manera, tiene que ver con la diferencia de formas existentes entre los cuadrados grises que se están trasladando y las zonas blancas a las cuales deben trasladarse. Sin embargo esto no representa ningún inconveniente para estos alumnos. Por ejemplo, una pareja de alumnos adopta una nueva unidad de visualización al aplicar una reconfiguración sobre los cuadrados grises y de esta manera los fraccionan en dos rectángulos ¡guales entre sí. El problema ya fue solucionado, pues al trasladarlos estos encajan perfectamente en las partes blancas, posteriormente dieron por terminada la situación: "...concluí que la parte blanca es más grande que la gris porque a la gris le hace falta 10 cuadritos pequeños para completar el lado A, mientras que en la blanca no le hace falta nada".

La anterior forma de ver pone en juego procedimientos totalmente figúrales, es decir, fue sólo mediante el recurso a las posibilidades heurísticas que permite el registro semiótico de las figuras que se llegó a una solución del problema planteado. En este caso, y a diferencia de los dos anteriores, el conteo no apareció en ningún momento como una herramienta fundamental para el desarrollo de la situación, sino que por el contrario los alumnos pusieron en juego racionalidades más complejas y elaboradas, propias de la geometría. Además, el área de superficies planas, objeto que se pretende movilizar con estas situaciones, siempre permaneció implícito a lo largo del proceso que los llevó a la solución del problema. Sin embargo, aquí la figura no jugó en su máxima potencialidad.

En lo que sigue presentamos una última manera de ver sobre esta figura que llevó a los alumnos a una solución del problema de forma casi inmediata. Esta forma de ver es consecuencia de un alto grado de visualización por parte de los alumnos que los pusieron en juego: un grupo muy pequeño de alumnos reconfiguró la figura inicial en 20 subfiguras iguales entre sí (ver Anexo 3). Asumen como unidad de visualización una de estas subfígura y centrados en ella concluyen que en la piscina la superficie blanca es mayor que la superficie gris. Al exigir una justificación uno de los alumnos se limitó a señalar primero la parte blanca y luego la parte gris de la subfígura y simultáneamente diciendo que "no la puedo volver como un cuadrado".

Innegablemente una pregunta que se desprende de los diferentes formas de ver que se han explicitado en párrafos anteriores, así como de los procedimientos que se desprenden de ellas sena ¿Qué es lo que lleva a tantos alumnos a ver de manera que pierden la globalidad de la figura y centren sus procedimientos exclusivamente en el conteo, mientras que otros alumnos logran ver de otras maneras y así movilizar procedimientos orientados por racionalidades más pertinentes, económicas y seguras que los evidenciados a través del conteo?

Dos aspectos que se deben tener en cuenta para dar respuesta a esta pregunta se relacionan con el papel que juega el fondo cuadriculado sobre el cual están dadas las figuras y con las posibilidades de aprendizaje del registro semiótico de las figuras que han tenido los alumnos. Por un lado, es oportuno señalar que los alumnos cuyos procedimientos evidenciaron las últimas tres formas de ver sobre una figura pertenecen a una quinta institución educativa, donde la profesora de matemáticas encargada del curso al cual pertenecen estos estudiantes, hace parte de un grupo de profesores que en el marco de un Programa de Formación Permanente de Docentes está analizando y discutiendo estrategias pedagógicas para la enseñanza de la geometría. Ella realiza un proyecto de indagación en el aula que se encuentra articulado a la presente investigación. La profesora previamente a la entrega de las situaciones movilizó en el aula de clase, y por un espacio de cinco sesiones, un cuestionario en el cual se exigía a los alumnos transformar una figura en otras de contorno global diferente. Caso contrario sucedió con los otros alumnos participantes en la investigación. En estos casos las profesoras encargadas entregaron las situaciones y pidieron a sus alumnos leer la consigna y posteriormente desarrollar la situación; la preocupación por parte de estas educadoras se centró exclusivamente en asegurarse si el conteo había sido bien realizado y por tanto que los números que indicaban el total de cuadrados grises y blancos fueran los correctos.

El gran contraste entre los procedimientos exhibidos por los estudiantes de la quinta institución, que los llevó a soluciones ágiles gracias al aprovechamiento heurístico de las figuras, con los mostrados por los estudiantes de las otras instituciones que dejan ver que para ellos las figuras tienen una naturaleza estática, es decir, representaciones inertes, fijas, a las que no se les puede introducir trazos, ni dividirías en subfiguras, ni aplicarles rotaciones y traslaciones y mucho menos transformarías en otra de contorno global diferente, pone de manifiesto no solo que ver sobre una figura está lejos de ser un asunto obvio y espontáneo, sino que es susceptible de un aprendizaje.

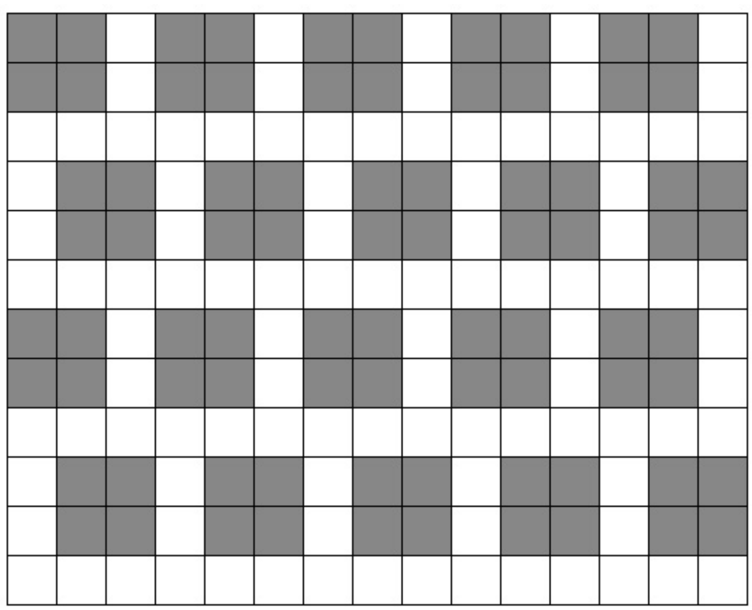
En el desarrollo de estas actividades por parte de las estudiantes de las cuatro primeras instituciones, la cuadrícula se convirtió en un factor de visibilidad que minimizó en gran medida una visualización en las figuras adecuada a la solución del problema; para ellos, este fondo cuadriculado pasó de ser un soporte sobre el cual se encontraba la figura a ser parte de ella. De esta manera, la organización perceptiva de la figura llevó a que estos alumnos vieran la figura como un conjunto de cuadrados puesto unos al lado del otro. Lo anterior se conecta y refuerza con lo enunciado en relación con la falta de posibilidades que han tenido estos alumnos en el aprendizaje de los tratamientos que brinda el registro de las figuras. Es claro, pues, que si no existe tal conciencia, los alumnos tendrán que reducir sus procedimientos únicamente a los tratamientos espontáneamente efectuados, que ya vimos son mínimos, o recurrir a tratamientos a los cuales sí han tenido acceso (el conteo).

Para terminar podemos concluir que la visualización no es un asunto de constatación inmediata y simple, sino una cuestión de tratamiento de la información y que es susceptible de un aprendizaje. Por lo tanto, teniendo en cuenta las posibilidades que este actividad cognitiva permite, es necesario asignar en el currículo escolar espacios específicos para su enseñanza. En este documento apostamos que el aprendizaje del área de superficies planas es un lugar ideal para introducir a los alumnos en el mundo de las posibilidades heurísticas de las figuras. Además es importante señalar que las 5 sesiones de aprendizaje que tuvieron los alumnos cuyos procedimientos mostraron unos buenos niveles de visualización, no son suficientes para asegurar una adecuada movilización de los tratamientos figúrales que permitan a la visualización ser una herramienta heurística ante las exigencias que la geometría escolar requiere. Este debe ser un aprendizaje que ojalá se dé durante todos los grados de la educación básica.

Anexo 1

Actividad 1

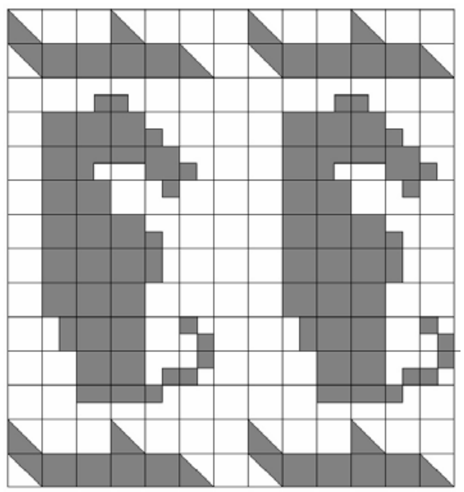
Este es el fondo de una piscina, necesitamos saber cuál superficie es mayor, la superficie blanca o la superficie gris. Explica tu procedimiento.



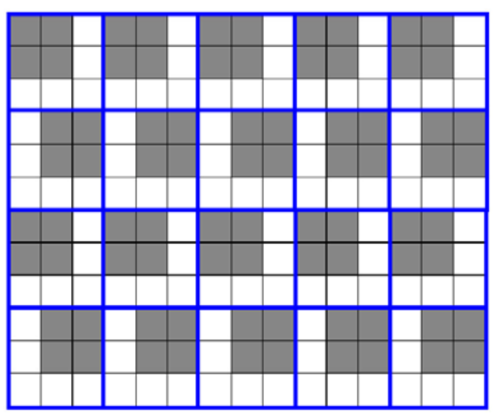
Anexo 2

Actividad 2

El mural del colegio está pintado tal como lo muestra la figura. Si los dibujos fueron pintados con color gris y el resto de la pared con color blanco ¿dónde se gastó mayor cantidad de pintura? Explica tu procedimiento.



Anexo 3



Bibliografía

[1] DICKSON, Linda; BROWN, M; y GIBSON, O; El aprendizaje de las matemáticas. Barcelona, Editorial Labor, S.A, 1991.

[2] DUVAL, R. Approveche Cognitive des Problèmes de géométrie en termes de congruence. Annales de Didactique et de Sciences Cognitivesm eu. 1998.

[3] ——— Graphiques et équqtions. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1. 1988. pp. 235-253.

[4] ——— Quel Cognitif Retenir en Didactique des Mathématiqques. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 16, #3, 1996.

[5] ——— Semiosis y pensamiento humano. Traducción realizada por Myriam Vega Restrepo. Cali: Universidad del Valle, 1999.

[6] MARMOLEJO, G. Construcción del Área Desde una Perspectiva Semiótica: Factores de Visibilidad y Procesos de Visualización. Tesis de Maestría en proceso. Universidad del Valle. Cali, Colombia. 2003

[7] MESQUITA, A. Sur une situation d'éveil à la deduction en géométrie. Educational Siudies in Mathematics. 1989.

[8] ——— L'influence des aspects figuratifs dans lárgumentation des élèves en géométrie: éléments pour une typologie. Thèse U.L.P. : Strasbourg. 1989.

[9] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Matemáticas: Lineamientos curriculares. Santa fé de Bogotá. Panamericana Formas e impresos. 1998.

[10] ——— Análisis y Resultados de las pruebas de Matemáticas - T.I.M.S.S./96. Colombia. Santafé de Bogotá. Creamos Alternativas. 1998.

[11] PADILLA. V. L'influence dé une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques. These U.L.P. : Strsbourg. 1992 .

[12] ——— Les figures aident-elles á voir en géometrié?. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 3, p. 223-252

[13] Vega, M, y otros. Enunciación y Significación de las Matemáticas en la Educación Básica. Proyecto de investigación patrocinado por Univalle y Colciencias. Cali, Colombia. 2003.